ΘΕΜΑ Δ

Ποσότητα ιδανικού αέριου ίση με $2/R$ mol, βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας στην οποία έχει πίεση $2{\cdot}10^5$ N/m^2 και θερμοκρασία 100 K. Το αέριο υφίσταται τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές: Θερμαίνεται ισοβαρώς μέχρι ο όγκος του να γίνει $5{\cdot}10^{-3}$ m^3. Ακολούθως ψύχεται ισόχωρα μέχρι να αποκτήσει θερμοκρασία ίδια με την αρχική. Τέλος το αέριο συμπιέζεται ισόθερμα μέχρι να βρεθεί στην αρχική του κατάσταση.

Δ1) Να κατασκευάσετε το διαγράμματα p –V σε βαθμολογημένους άξονες.

Μονάδες 6

Δ2) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα $p – T$ και V - T σε βαθμολογημένους άξονες.

Μονάδες 8

Δ3) Υπολογίστε τη θερμότητα που αποβάλλει το αέριο συνολικά κατά την κυκλική μεταβολή.

Μονάδες 5

Δ4) Υπολογίστε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου σε κάθε μεταβολή ξεχωριστά.

Μονάδες 6

Δίνεται ότι στα ιδανικά μονοατομικά αέρια $C_v = \frac{3R}{2}$ και ότι $ln\, 5 \approx 1.6$

Δ1. Αρχικά σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών για την πίεση, τον όγκο και τη θερμοκρασία του αερίου, στις καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας.

Από την καταστατική εξίσωση υπολογίζουμε τον όγκο στην αρχική κατάσταση (κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A).

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{\frac{2}{R}R100}{2\cdot 10^5} \Rightarrow V_A = 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Ισοβαρής εκτόνωση $p_B = p_A$ (κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας B):

$$\frac{T_B}{V_B} = \frac{T_A}{V_A} \Rightarrow T_B = T_A\frac{V_B}{V_A} = 100\frac{5\cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \Rightarrow T_B = 500\ \text{K}$$

Ισόχωρη ψύξη $V_\Gamma = V_B$ (κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ):

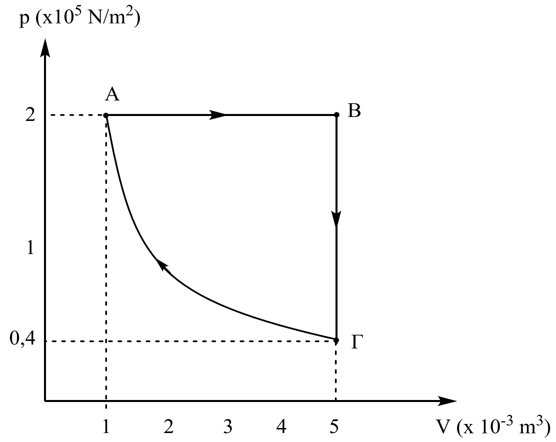
$$\frac{p_\Gamma}{p_B} = \frac{T_\Gamma}{T_B} \Rightarrow p_\Gamma = p_B\frac{T_\Gamma}{T_B} = 2\cdot 10^5\frac{100}{500} \Rightarrow p_\Gamma = 0{,}4\cdot 10^5\ \text{N/m}^2$$

Ισόθερμη συμπίεση – επιστροφή στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A.

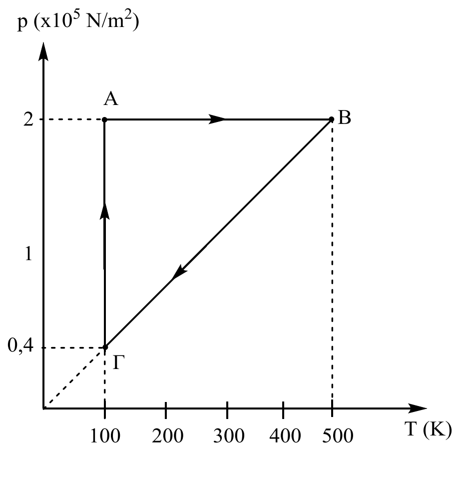
Πίνακας Τιμών

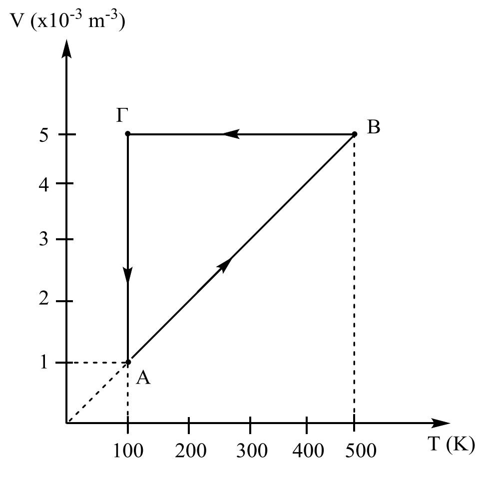
	p (x 10^5 n/m^2)	V (x 10^{-3} m^3)	T (K)
A	2	1	100
B	2	5	500
Γ	0,4	5	100
A	2	1	100

Με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα, σχηματίζουμε το διάγραμμα $p-V$ σε βαθμολογημένους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ2. Τα διαγράμματα $p-T$ και $V-T$ φαίνονται στη συνέχεια (με βάση τον πίνακα τιμών του Δ1).





Δ3. Από το διάγραμμα $p-V$ φαίνεται ότι αποβολή (έκλυση) θερμότητας έχουμε κατά τις αντιστρεπτές μεταβολές $B \to \Gamma$ και $\Gamma \to A$.

Η μεταβολή $B \to \Gamma$ είναι ισόχωρη. Οπότε:

$$Q_{B\Gamma} = nC_V \Delta T_{B\Gamma} = \frac{2}{R}\frac{3R}{2}(100-500) = 3\cdot(-400) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = -1200 \text{ J}.$$

Η μεταβολή $\Gamma \to A$ είναι ισόθερμη. Οπότε

$$Q_{\Gamma A} = nRT\ln\frac{V_A}{V_\Gamma} = \frac{2}{R}\cdot R\cdot 100\cdot \ln\frac{1\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} = 200\ln 5^{-1} = -200\cdot 1{,}6 \Rightarrow Q_{\Gamma A} = -320 \text{ J}$$

Επομένως, η θερμότητα που αποβάλλει το αέριο στην κυκλική μεταβολή είναι:

$$Q = Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} = -1200 + (-320) \Rightarrow Q = -1520 \text{ J}.$$

Δ4. Υπολογισμός της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας σε κάθε μεταβολή του αερίου.

Η μεταβολή $A \to B$ είναι ισοβαρής. Από τον 1^o Θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \qquad (1)$$

$$W_{AB} = p\Delta V_{AB} = 2\cdot 10^5\cdot(5\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^{-3}) = 2\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3} \Rightarrow W_{AB} = 800 \text{ J} \qquad (2)$$

$$Q_{AB} = nC_P\Delta T_{AB} \qquad (3)$$

Αλλά: $C_P = C_V + R = \frac{3}{2}R + R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2}R$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$Q_{AB} = \frac{2}{R}\frac{5}{2}R(500-100) = 5\cdot 400 \Rightarrow Q_{AB} = 2000 \text{ J} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) τις τιμές των (2) και (5) προκύπτει:

$$2000 = 800 + \Delta U_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = 1200 \text{ J}.$$

Η μεταβολή $B \to \Gamma$ είναι ισόχωρη, επομένως το έργο είναι μηδέν και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ισούται με το ποσόν της θερμότητας. Το ποσόν αυτό έχει υπολογισθεί στο ερώτημα Δ3. Επομένως:

$$\Delta U_{B\Gamma} = Q_{B\Gamma} \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = -1200 \text{ J}.$$

Η μεταβολή $\Gamma \to A$ είνα ισόθερμη, και επομένως η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\Delta U_{\Gamma A} = 0 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή, η οποία αποτελείται από τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές: Αρχικά ισόχωρη μεταβολή κατά την οποία προσφέρεται στο αέριο θερμότητα 200 J, στη συνέχεια ισόθερμη μεταβολή κατά την οποία το αέριο παράγει έργο 150 J και τελικά επιστρέφει στην αρχική κατάσταση μέσω μιας ισοβαρούς μεταβολής αποδίδοντας στο περιβάλλον θερμότητα 250 J.

Δ1) Να κατασκευάσετε ποιοτικά διαγράμματα (δηλαδή χωρίς αριθμούς) $p - V$ και V - T

Μονάδες 7

Δ2) Υπολογίστε το συνολικό μηχανικό έργο που αποδίδει το αέριο σε αυτή την κυκλική μεταβολή.

Μονάδες 6

Δ3) Υπολογίστε το συνολικό ποσό θερμότητας που αποβάλει το αέριο στο περιβάλλον σε αυτή την κυκλική μεταβολή.

Μονάδες 6

Δ4) Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης μιας θερμικής μηχανής η οποία θα λειτουργούσε με βάση τον παραπάνω αντιστρεπτό κύκλο.

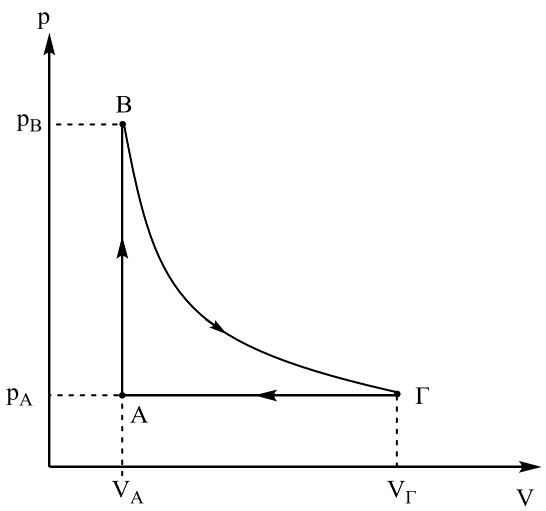
Μονάδες 6

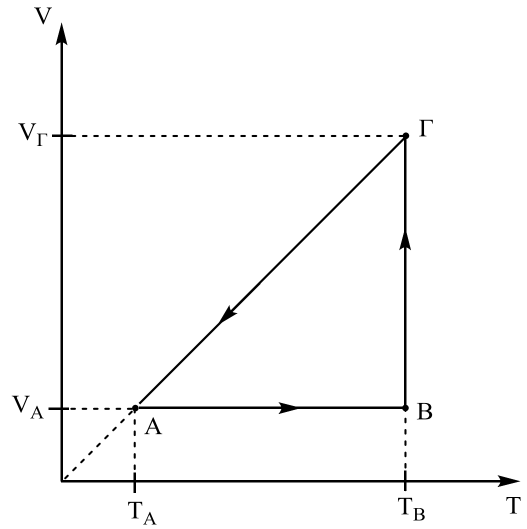
Δ1. Για να σχηματίσουμε το διάγραμμα $p \to V$ πρέπει να γνωρίζουμε το είδος κάθε μεταβολής.
Αρχικά ας θεωρήσουμε ότι το αέριο βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α.
Σύμφωνα με την εκφώνηση υφίσταται ισόχωρη μεταβολή με προσφορά θερμότητας. Έτσι αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια του αερίου, άρα και η θερμοκρασία του. Δηλαδή τελικά αυξάνεται η πίεση του αερίου (κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β).
Κατά την επόμενη μεταβολή (ισόθερμη) το αέριο παράγει έργο. Επομένως ο όγκος του αυξάνεται και η πίεσή του μειώνεται. Πόσο όμως;
Αυτό προκύπτει από την τρίτη μεταβολή (ισοβαρή συμπίεση). Αφού είναι ισοβαρής σημαίνει ότι η πίεση που απέκτησε κατά την ισόθερμη μεταβολή, ισούται με την αρχική του πίεση. Επομένως ο πίνακας τιμών θα έχει ως εξής:

Πίνακας Τιμών

	Πίεση	Όγκος	Θερμοκρασία
Α	p_A	V_A	T_A
Β	$p_B > p_A$	$V_B = V_A$	$T_B > T_A$
Γ	$p_\Gamma = p_A$	$V_\Gamma > V_A$	$T_\Gamma = T_B$

Τα ζητούμενα διαγράμματα $p \to V$ και $V \to T$ θα έχουν ως εξής:





Δ2. Θα εφαρμόσουμε τον 1ο Θερμοδυναμικό νόμο σε κάθε μεταβολή.
Για την ισόχωρη μεταβοή $A \to B$ γνωρίζουμε ότι $Q_{AB} = +200$ J. Επειδή όμως στην ισόχωρη μεταβολή το έργο είναι μηδέν, έπεται ότι $\Delta U_{AB} = +200$ J.
Για την ισόθερμη μεταβολή $B \to \Gamma$ γνωρίζουμε ότι $W_{B\Gamma} = +150\ J$. Επειδή στην ισόθερμη μεταβολή η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι μηδέν, έπεται ότι $Q_{B\Gamma} = +150$ J.
Συνοπτικά οι πληροφορίες που έχουμε είναι:

	Q	W	ΔU
$A \to B$	+200	0	+200
$B \to \Gamma$	+150	+150	0
$\Gamma \to A$	−250		

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε κυκλική μεταβολή $Q_{ολ} = W_{ολ}$.
Αλλά $Q_{ολ} = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} = +200 + 150 - 250 \Rightarrow Q_{ολ} = +100$ J.

Επομένως $W_{ολ} = +100$ J.

Δ3. Όπως φαίνεται από τον πίνακα του ερωτήματος Δ2, η μεταβολή στην οποία έχουμε αποβολή θερμότητας είναι η $\Gamma \to A$. Άρα το ζητούμενο ποσό θερμότητας είναι -250 J.

Δ4. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$e = \frac{W_{ολ}}{Q_{προσφ}}$

Από τον πίνακα του ερωτήματος Δ2 προκύπτει ότι το προσφερόμενο ποσό θερμότητας είναι $Q_{προσφ} = 200 + 150 \Rightarrow Q_{προσφ} = +350$ J.

Επομένως:

$$e = \frac{W_{ολ}}{Q_{προσφ}} = \frac{100}{350} \Rightarrow e = \frac{2}{7}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ορισμένη ποσότητα μονατομικού ιδανικού αερίου που βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α (p_0, V_0, T_0), υπόκειται στην παρακάτω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή:

ΑΒ-ισοβαρής εκτόνωση μέχρι να διπλασιάσει τον όγκο του,

ΒΓ-ισόθερμη θέρμανση μέχρι να διπλασιάσει τον όγκο που έχει στην κατάσταση Β,

ΓΔ-ισόχωρη ψύξη μέχρι το αέριο να αποκτήσει τη θερμοκρασία που είχε στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α,

ΔΑ-ισόθερμη συμπίεση ώστε να επανέλθει στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α.

Δ1) Να γίνει η γραφική παράσταση των μεταβολών σε άξονες p-V, όπου θα φαίνονται οι τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας του αερίου στις καταστάσεις Α, Β, Γ και Δ, συναρτήσει των p_0, V_0, T_0. (Οι τιμές της θερμοκρασίας θα σημειωθούν πάνω στις ισόθερμες καμπύλες.)

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας του αερίου $\Delta U_{\text{ΑΒ}}$, $\Delta U_{\text{ΓΔ}}$ και $\Delta U_{\text{ΔΑ}}$ που αντιστοιχούν στις μεταβολές ΑΒ, ΓΔ και ΔΑ.

Μονάδες 5

Δ3) Να υπολογίσετε τη θερμότητα και το έργο που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον του σε έναν κύκλο.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε την απόδοση μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ισόθερμων του παραπάνω κύκλου καθώς και την απόδοση θερμικής μηχανής που λειτουργεί σύμφωνα με την παραπάνω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή.

Μονάδες 7

Δίνονται η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο $C_v = 3R/2$ και ln2=0,7.

Δ1. Για κάθε μεταβολή που περιγράφεται θα υπολογίσουμε τις θερμοδυναμικές παραμέτρους της αντίστοιχης κατάστασης στην οποία μεταβαίνει το αέριο.

$A \rightarrow B$ Ισοβαρής θέρμανση $\dfrac{T_B}{T_A} = \dfrac{V_B}{V_A} \Rightarrow \dfrac{T_B}{T_o} = \dfrac{2V_o}{V_o} \Rightarrow T_B = 2T_o$

$B \rightarrow \Gamma$ Ισόθερμη εκτόνωση $p_\Gamma V_\Gamma = p_B V_B \Rightarrow p_\Gamma = p_A \dfrac{V_B}{V_\Gamma} = p_o \dfrac{2V_o}{2 \cdot 2V_o} \Rightarrow p_\Gamma = \dfrac{p_o}{2}$

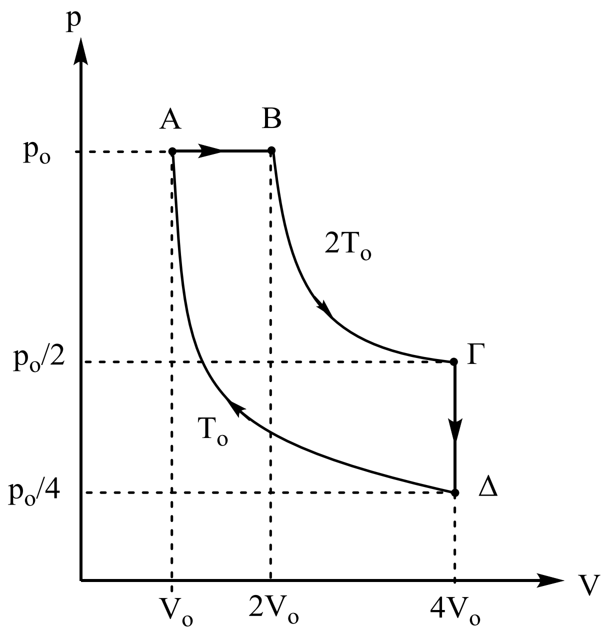
$\Gamma \rightarrow \Delta$ Ισόχωρη ψύξη $\dfrac{p_\Delta}{p_\Gamma} = \dfrac{T_\Delta}{T_\Gamma} \Rightarrow p_\Delta = p_\Gamma \dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{p_o}{2} \dfrac{T_o}{2T_o} \Rightarrow p_\Delta = \dfrac{p_o}{4}$

$\Delta \rightarrow A$ Ισόθερμη συμπίεση Αρχικές συνθήκες

Από τις παραπάνω πληροφορίες σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα $p-V$.

Πίνακας Τιμών			
	Πίεση	Όγκος	Θερμοκρασία
Α	p_o	V_o	T_o
Β	p_o	$2V_o$	$2T_o$
Γ	$\dfrac{p_o}{2}$	$4V_o$	$2T_o$
Δ	$\dfrac{p_o}{4}$	$4V_o$	T_o
Α	p_o	V_o	T_o

Το ζητούμενο διάγραμμα $p-V$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ2. Υπολογισμός μεταβολών εσωτερικής ενέργειας σε κάθε μεταβολή.

$A \rightarrow B$ (Ισοβαρής θέρμανση)

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = nC_P \Delta T_{AB} - p\Delta V_{AB} \Rightarrow$$
$$\Delta U_{AB} = nC_P \Delta T_{AB} - nR\Delta T_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = (C_P - R)n\Delta T_{AB} \quad (1)$$

Αλλά ισχύει ότι: $C_P = C_V + R \Rightarrow C_P - R = C_V$ (2)

Επομένως: $\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} = n\dfrac{3}{2}R(T_B - T_A) = n\dfrac{3}{2}R(2T_o - T_o) \Rightarrow \Delta U_{AB} = \dfrac{3}{2}nRT_o$ (3)

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση για την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α έχουμε:

$p_o V_o = nRT_o$ (4)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} p_o V_o$$

$B \rightarrow \Gamma$ (Ισόθερμη εκτόνωση) $\quad \Delta U_{B\Gamma} = 0$

$\Gamma \rightarrow \Delta$ (Ισόχωρη εκτόνωση) $\quad \Delta U_{\Gamma\Delta} = Q_{\Gamma\Delta} = nC_V \Delta T_{\Gamma\Delta} = n\frac{3}{2}R(T_0 - 2T_o) = -\frac{3}{2}nRT_o \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -\frac{3}{2}p_o V_o$

$\Delta \rightarrow A$ (Ισόθερμη συμπίεση) $\quad \Delta U_{\Delta A} = 0$

Δ3.

$A \rightarrow B$ (Ισοβαρής θέρμανση)

$W_{AB} = p_o \Delta V = p_o(V_B - V_A) = p_o(2V_0 - V_o) \Rightarrow W_{AB} = p_o V_o$

$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \overset{\Delta 2}{\Rightarrow} Q_{AB} = p_o V_o + \frac{3}{2}p_o V_o \Rightarrow Q_{AB} = \frac{5}{2}p_o V_o$

$B \rightarrow \Gamma$ (Ισόθερμη εκτόνωση)

$$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} = nRT_B \ln\frac{V_\Gamma}{V_B} = nR2T_o \ln\frac{4V_o}{2V_o} = 2nRT_o \ln 2 = 2 \cdot 0,7 \cdot p_o V_o = 1,4 p_o V_o$$

$\Gamma \rightarrow \Delta$ (Ισόχωρη εκτόνωση)

$Q_{\Gamma\Delta} = -\frac{3}{2}p_o V_o$ (από το ερώτημα Δ2)

$W_{\Gamma\Delta} = 0$

$\Delta \rightarrow A$ (Ισόθερμη συμπίεση)

$$Q_{\Delta A} = W_{\Delta A} = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_\Delta} = nRT_o \ln\frac{V_o}{4V_o} = nRT_o \ln 4^{-1} = -2 \cdot 0,7 \cdot p_o V_o \Rightarrow Q_{\Delta A} = W_{\Delta A} = -1,4 p_o V_o$$

Υπολογίζουμε το έργο και τη θερμότητα που ανταλλάσσεται σε κάθε κύκλο της μηχανής:

$W = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta A} = p_o V_o + 1,4 p_o V_o + 0 - 1,4 p_o V_o \Rightarrow W = p_o V_o$

Η μεταβολή είναι κυκλική οπότε $\Delta U = 0$ και $Q = W$ οπότε

$Q = p_o V_o$

Δ4. Η απόδοση της μηχανής Carnot εξαρτάται από την υψηλή και τη χαμηλή θερμοκρασία της κυκλικής μεταβολής. Επομένως

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_o}{2T_o} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow e = 0,5$$

Η απόδοση της θερμικής μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}}$$

Το ολικό έργο υπολογίζεται από το ερώτημα Δ3:

$W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta A} = p_o V_o + 1,4 p_o V_o + 0 - 1,4 p_o V_o \Rightarrow W_{o\lambda} = p_o V_o$

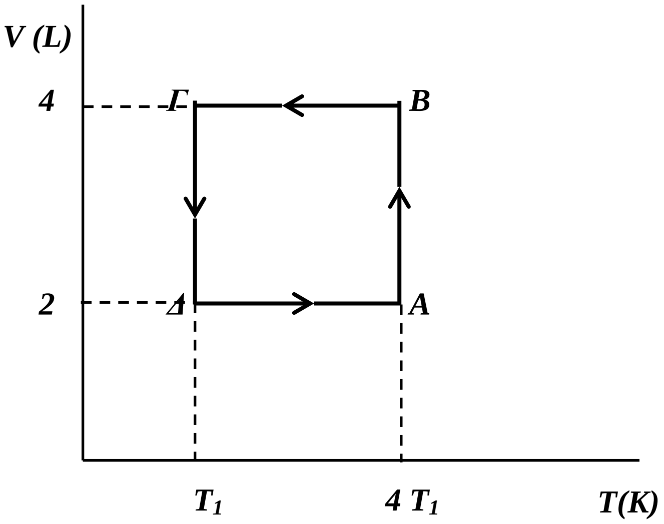
Το προσφερόμενο ποσό θερμότητας ισούται:

$Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} = p_o V_o + 1,4 p_o V_o \Rightarrow Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = 2,4 p_o V_o$

Επομένως ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}} = \frac{p_o V_o}{2,4 p_o V_o} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} \Rightarrow e = \frac{5}{12}$$

ΘΕΜΑ Δ



Μία θερμική μηχανή που χρησιμοποιεί ιδανικό αέριο λειτουργεί με τον αντιστρεπτό κύκλο που φαίνεται στο διάγραμμα. Στην αρχική κατάσταση *A* η πίεση του ιδανικού αερίου είναι ίση με $p_A = 4 \cdot 10^5$ N/m^2.

Δ1) Να υπολογίσετε την απόδοση μίας θερμικής μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων ισόθερμων, με αυτές στις οποίες λειτουργεί η θερμική μηχανή που σας δίνεται.

Μονάδες 5

Δ2) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα P-V της κυκλικής μεταβολής σε βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 7

Δ3) Να υπολογίσετε το ωφέλιμο έργο που αποδίδει η μηχανή σε κάθε κύκλο λειτουργίας της.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής.

Μονάδες 7

Δίνονται: $\ln 2 = 0,7$ και $C_V = 3R/2$

Δ1. Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής Carnot δίνεται από τη σχέση: $e = 1 - \frac{T_C}{T_H}$ όπου T_C η θερμοκρασία της δεξαμενής χαμηλών θερμοκρασιών και T_H η θερμοκρασία της δεξαμενής υψηλών θερμοκρασιών. Σύμφωνα με τον κύκλο που δίνεται $T_C = T_1$ και $T_H = 4T_1$. Επομένως:

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{T_1}{4T_1} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{3}{4}.$$

Δ2. Από το διάγραμμα που δίνεται θα υπολογίσουμε τις άγνωστες θερμοδυναμικές παραμέτρους, θα σχηματίσουμε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών και θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα $p - V$.

$A \to B$ (Ισόθερμη μεταβολή) $\quad p_B V_B = p_A V_A \Rightarrow p_B = p_A \frac{V_A}{V_B} = 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{4} \Rightarrow p_B = 2 \cdot 10^5 \ \mathrm{N/m^2}$

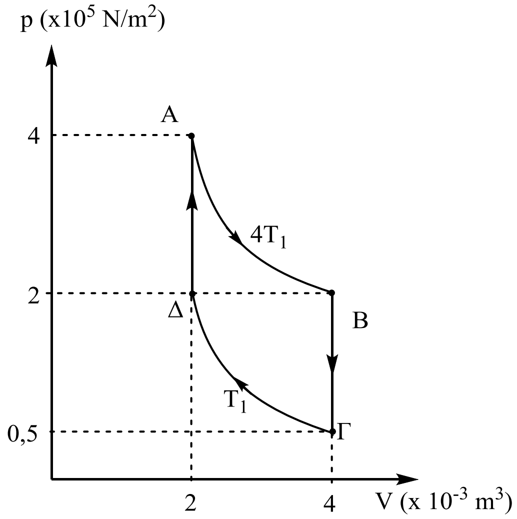
$B \to \Gamma$ (Ισόχωρη μεταβολή) $\quad \frac{p_\Gamma}{p_B} = \frac{T_\Gamma}{T_B} \Rightarrow p_\Gamma = p_B \frac{T_\Gamma}{T_B} = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{T_1}{4T_1} \Rightarrow p_\Gamma = 0,5 \cdot 10^5 \ \mathrm{N/m^2}$

$\Gamma \to \Delta$ (Ισόθερμη μεταβολή) $\quad p_\Delta V_\Delta = p_\Gamma V_\Gamma \Rightarrow p_\Delta = p_\Gamma \frac{V_\Gamma}{V_\Delta} = 0,5 \cdot 10^5 \cdot \frac{4}{2} \Rightarrow p_\Delta = 10^5 \ \mathrm{N/m^2}$

Από τις τιμές που υπολογίσθηκαν σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών.

	Πίεση ($\times 10^5 \ \mathrm{N/m^2}$)	Όγκος ($\times 10^{-3} \ \mathrm{m^3}$)	Θερμοκρασία
Α	4	2	$4T_1$
Β	2	4	$4T_1$
Γ	0,5	4	T_1
Δ	1	2	T_1

Το διάγραμμα $p - V$ θα είναι ως εξής:



Δ3. Υπολογίζουμε το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται σε κάθε αντιστρεπτή μεταβολή.

$A \to B \quad W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} \Rightarrow W_{AB} = p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \ln\frac{4}{2} = 800 \cdot 0,7 \Rightarrow W_{AB} = 560 \ \mathrm{J}$

$B \to \Gamma \quad W_{B\Gamma} = 0$

$\Gamma \to \Delta \quad W_{\Gamma\Delta} = nRT_\Gamma \ln\frac{V_\Delta}{V_\Gamma} = p_\Gamma V_\Gamma \ln\frac{V_\Delta}{V_\Gamma} = 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \ln\frac{2}{4} = -200 \cdot 0,7 \Rightarrow W_{\Gamma\Delta} = -140 \ \mathrm{J}$

$\Delta \to A \quad W_{\Delta A} = 0$

Επομένως: $W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta A} = 560 + 0 - 140 + 0 \Rightarrow W_{o\lambda} = 420 \ \mathrm{J}.$

Δ4. Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}}$$

Υπολογίζουμε τη θερμότητα που προσφέρεται στην κυκλική μεταβολή. Οι μεταβολές που περιλαμβάνουν προσφορά θερμότητας από το περιβάλλον στη θερμική μηχανή είναι οι $A \to B$ και $\Delta \to A$.

$Q_{AB} = W_{AB} = 560$ J (από το ερώτημα Δ3).

$$Q_{\Delta A} = nC_V \Delta T = n\frac{3}{2}R(T_A - T_\Delta) = \frac{3}{2}(nRT_A - nRT_\Delta) = \frac{3}{2}(p_A V_A - p_\Delta V_\Delta) =$$

$$= \frac{3}{2}(4\cdot 10^5 \cdot 2\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^5 \cdot 2\cdot 10^{-3}) = \frac{3}{2}(800-200) = \frac{3\cdot 600}{2} \Rightarrow Q_{\Delta A} = 900 \text{ J}$$

Επομένως $Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = Q_{AB} + Q_{\Delta A} = 560 + 900 \Rightarrow Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = 1460$ J.

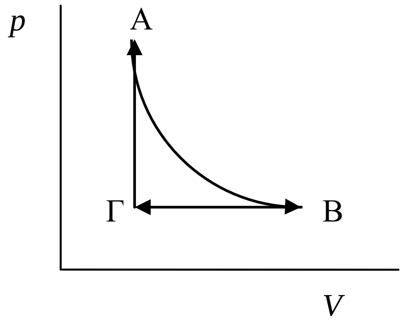
Άρα ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}} = \frac{420}{1460} \Rightarrow e = \frac{61}{73}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές: Α→Β ισόθερμη εκτόνωση, Β→Γ ισοβαρής συμπίεση και Γ→Α ισόχωρη θέρμανση.

Δίνονται για τις καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας Α και Β: $p_A = 4 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$, $V_A = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$, $V_B = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$.



Δ1) Να βρείτε το έργο που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος για κάθε μία από τις παραπάνω αντιστρεπτές μεταβολές.

Μονάδες 6

Δ2) Για κάθε μία μεταβολή να βρείτε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και το ποσό θερμότητας που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος.

Μονάδες 9

Δ3) Εάν μια μηχανή λειτουργεί με το ιδανικό αέριο που εκτελεί τον παραπάνω κύκλο, να βρείτε την απόδοση αυτής της μηχανής.

Μονάδες 5

Δ4) Να βρεθεί η απόδοση μιας ιδανικής μηχανής Carnot η οποία λειτουργεί μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών.

Μονάδες 5

Δίνονται: Για το ιδανικό αέριο η γραμμοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο $C_V = \frac{3}{2}R$ και $\ln 2 = 0{,}7$.

Δ1. Υπολογισμός του έργου στην ισόθερμη μεταβολή $A \to B$.

$$W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} \qquad (1)$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία T_A, θα χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση για τη θέση Α:

$$p_A V_A = nRT_A \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$W_{AB} = p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 4\cdot 10^5 \cdot 2\cdot 10^{-3} \ln\frac{4\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} = 800\cdot \ln 2 = 800\cdot 0{,}7 \Rightarrow W_{AB} = 560 \text{ J}$$

Υπολογισμός του έργου στην ισοβαρή μεταβολή $B \to \Gamma$.

$$W_{B\Gamma} = p_B(V_\Gamma - V_B)$$

Υπολογίζουμε την πίεση στην κατάσταση Β, από την ισόθερμη μεταβολή $A \to B$.

$$p_B V_B = p_A V_A \Rightarrow p_B = p_A \frac{V_A}{V_B} = 4\cdot 10^5 \cdot \frac{2\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3}} \Rightarrow p_B = 2\cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

Και επειδή $V_\Gamma = V_A$ θα έχουμε:

$$W_{B\Gamma} = p_B(V_A - V_B) = p_B(V_A - V_B) = 2\cdot 10^5 \cdot (2\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-3}) \Rightarrow W_{B\Gamma} = -400 \text{ J}$$

Τέλος, επειδή η αντιστρεπτή μεταβολή $\Gamma \to A$ είναι ισόχωρη, το έργο θα είναι μηδέν, δηλ.

$$W_{\Gamma A} = 0 \text{ J}$$

Δ2. Μεταβολή $A \to B$

Επειδή η μεταβολή είναι ισόθερμη, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας θα είναι μηδέν, δηλαδή $\Delta U_{AB} = 0$ J οπότε η θερμότητα που ανταλλάσσεται με το περιβάλλον θα προκύψει από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο, χρησιμοποιώντας την τιμή του έργου από το ερώτημα Δ1.

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = W_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = 560 \text{ J}$$

Μεταβολή $B \to \Gamma$

Επειδή η μεταβολή είναι ισοβαρής, θα υπολογίσουμε και τη θερμότητα και τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας.

$$Q_{B\Gamma} = nC_P \Delta T = nC_P(T_\Gamma - T_B) \qquad (3)$$

Αλλά $C_p = C_V + R = \frac{3}{2}R + R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2}R$ (4)

η σχέση (3) γίνεται:

$$Q_{B\Gamma} = nC_P(T_\Gamma - T_B) = n\frac{3}{2}R(T_\Gamma - T_B) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = \frac{3}{2}(nRT_\Gamma - nRT_B) \qquad (5)$$

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση για τα σημεία Β και Γ έχουμε:

Για το σημείο Β: $p_B V_B = nRT_B$ και για το σημείο Γ: $p_\Gamma V_\Gamma = nRT_\Gamma \Rightarrow p_B V_A = nRT_\Gamma$ (αφού $p_\Gamma = p_B$ και $V_\Gamma = V_A$). Έτσι η σχέση (5) γίνεται:

$$Q_{B\Gamma} = \frac{5}{2}(nRT_\Gamma - nRT_B) = \frac{5}{2}(p_B V_A - p_B V_B) = \frac{5}{2}p_B(V_A - V_B) = \frac{5}{2}\cdot 2\cdot 10^5(2\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{B\Gamma} = 5\cdot 10^{-5}\cdot(-2\cdot 10^{-3}) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = -1000 \text{ J}$$

Επειδή στο ερώτημα Δ1 υπολογίσαμε το έργο κατά τη μεταβολή $B \to \Gamma$, εφαρμόζοντας τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

$$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} + \Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = Q_{B\Gamma} - W_{B\Gamma} = -1000 - (-400) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = -600 \text{ J}$$

Μεταβολή $\Gamma \to A$

Η μεταβολή είναι ισόχωρη. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την θερμότητα που απορροφάται σε αυτή τη μεταβολή από τη σχέση $Q = nC_V \Delta T$. Ωστόσο, θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση.

Επειδή η μεταβολή $A \to B \to \Gamma \to A$ είναι κυκλική, γνωρίζουμε ότι $\Delta U = 0$, δηλ. ισχύει ότι $\Delta U_{AB} + \Delta U_{B\Gamma} + \Delta U_{\Gamma A} = 0 \Rightarrow 0 + (-600) + \Delta U_{\Gamma A} = 0 \Rightarrow \Delta U_{\Gamma A} = 600\ \mathrm{J}$ και επειδή $W_{\Gamma A} = 0\ \mathrm{J}$ από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο θα έχουμε ότι:

$$Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} + \Delta U_{\Gamma A} = 0 + 600 \Rightarrow Q_{\Gamma A} = 600\ \mathrm{J}$$

Δ3. Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma}}$$

Το ολικό έργο μπορεί να υπολογιστεί από τις τιμές του ερωτήματος Δ1. Δηλαδή

$$W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 560 - 400 + 0 \Rightarrow W_{o\lambda} = 160\ \mathrm{J}$$

ενώ το προσφερόμενο ποσό θερμότητας από τις τιμές του ερωτήματος Δ2. Δηλαδή

$$Q_{\pi\rho o\sigma} = Q_{AB} + Q_{\Gamma A} = 560 + 600 \Rightarrow Q_{\pi\rho o\sigma} = 1160\ \mathrm{J}$$

Επομένως:

$$e = \frac{W_{\omega\varphi}}{Q_{\pi\rho o\sigma}} = \frac{160}{1160} \Rightarrow e = \frac{4}{29}$$

Δ4. Η απόδοση μιας ιδανικής μηχανής Carnot που δουλεύει στις παραπάνω θερμοκρασίες θα δίνεται από τη σχέση: $e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$.

Το διάγραμμα της κυκλικής μεταβολής $A \to B \to \Gamma \to A$ εξελίσσεται μεταξύ δύο ακραίων θερμοκρασιών: της $T_A = T_B$ η οποία αντιστοιχεί στην T_h και της T_Γ η οποία αντιστοιχεί στην T_c. Επειδή δεν γνωρίζουμε αυτές τις θερμοκρασίες, θα τις υπολογίσουμε μέσω της καταστατικής εξίσωσης. Δηλαδή:

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow p_A V_A = nRT_h \Rightarrow T_h = \frac{p_A V_A}{nR}$$

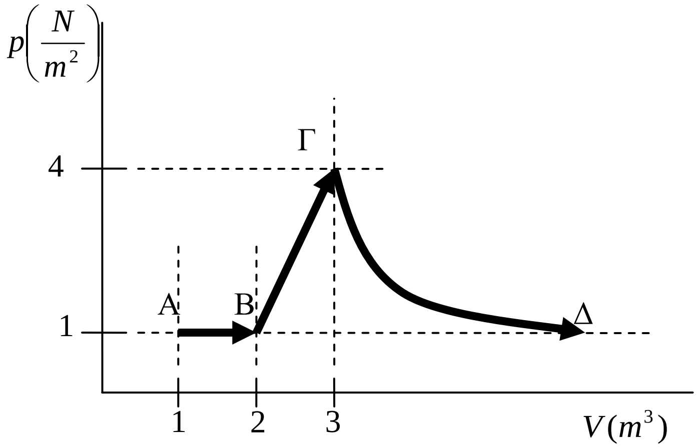
$$p_\Gamma V_\Gamma = nRT_\Gamma \Rightarrow p_B V_A = nRT_c \Rightarrow T_c = \frac{p_B V_A}{nR}$$

Επομένως ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot θα είναι:

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{\frac{p_B V_A}{nR}}{\frac{p_A V_A}{nR}} = 1 - \frac{p_B}{p_A} = 1 - \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow e = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται στο παρακάτω σχήμα κάποιες αντιστρεπτές μεταβολές τις οποίες υφίσταται ποσότητα ιδανικού, μονοατομικού αερίου. Δίνεται επίσης ότι η μεταβολή ΓΔ είναι αδιαβατική, ότι η πίεση στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Δ είναι ίδια με την πίεση στις καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας Α και Β (όπως φαίνεται και από το σχήμα).



Να υπολογιστούν:

Δ1) Ο όγκος του αερίου στην κατάσταση ισορροπίας Δ.

Μονάδες 7

Δ2) Το έργο που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον για κάθε μία μεταβολή ξεχωριστά.

Μονάδες 6

Δ3) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου σε κάθε μία από τις μεταβολές.

Μονάδες 6

Δ4) Η θερμότητα που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος σε κάθε μία από τις μεταβολές.

Μονάδες 6

Δίδεται ότι για τα ιδανικά μονοατομικά αέρια ισχύει: $\gamma = \frac{5}{3}$. Επίσης θεωρήστε ότι $4^{3/5} = 2,3$.

Δ1. Επειδή γνωρίζουμε ότι η μεταβολή $\Gamma \to \Delta$ είναι αδιαβατική, θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Poisson για να υπολογίσουμε τον όγκο του αερίου στην κατάσταση Δ.

$$p_\Delta V_\Delta^\gamma = p_\Gamma V_\Gamma^\gamma \Rightarrow V_\Delta^\gamma = V_\Gamma^\gamma \frac{p_\Gamma}{p_\Delta} \Rightarrow V_\Delta = V_\Gamma \left(\frac{p_\Gamma}{p_\Delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{1}\right)^{\frac{1}{\frac{5}{3}}} = 3 \cdot 4^{\frac{3}{5}} = 3 \cdot 2{,}3 \Rightarrow V_\Delta = 6{,}9 \text{ m}^3$$

Δ2. Υπολογίζουμε το έργο για κάθε μεταβολή που περιγράφεται στο σχήμα:

$A \to B$ Η μεταβολή είναι ισοβαρής και το έργο θα είναι:

$$W_{AB} = p\Delta V = p_A(V_B - V_A) = 1 \cdot (2-1) \Rightarrow W_{AB} = 1 \text{ J}$$

$B \to \Gamma$ Η μεταβολή αυτή δεν εμπίπτει σε κάποια από τις γνωστές μεταβολές. Επομένως θα υπολογίσουμε το έργο που παράγεται από τη γραφική παράσταση καθώς γνωρίζουμε ότι το έργο δίνεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα τραπέζιο.

$$W_{B\Gamma} = \left(\frac{4+1}{2}\right) \cdot (3-2) \Rightarrow W_{B\Gamma} = 2{,}5 \text{ J}$$

$\Gamma \to \Delta$ Η μεταβολή είναι αδιαβατική και επομένως το έργο θα υπολογιστεί από την αντίστοιχη σχέση της αδιαβατικής μεταβολής.

$$W_{\Gamma\Delta} = \frac{p_\Delta V_\Delta - p_\Gamma V_\Gamma}{1-\gamma} = \frac{1 \cdot 6{,}3 - 4 \cdot 3}{1 - \frac{5}{3}} = 3 \cdot \frac{(6{,}9 - 12)}{3-5} = 3 \cdot \frac{-5{,}7}{-2} \Rightarrow W_{\Gamma\Delta} = 7{,}65 \text{ J}$$

Δ3. Υπολογισμός των μεταβολών εσωτερικής ενέργειας.

$A \to B$ Η μεταβολή είναι ισοβαρής οπότε θα ισχύει:

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} p\Delta V = \frac{3}{2} p_A(V_B - V_A) = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (2-1) \Rightarrow \Delta U_{AB} = 1{,}5 \text{ J}$$

$B \to \Gamma$ Η μεταβολή αυτή δεν εμπίπτει σε κάποια από τις γνωστές μεταβολές. Επομένως:

$$\Delta U_{B\Gamma} = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} nR(T_\Gamma - T_B) = \frac{3}{2}(nRT_\Gamma - nRT_B) = \frac{3}{2}(p_\Gamma V_\Gamma - p_B V_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = \frac{3}{2}(4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = 15 \text{ J}$$

$\Gamma \to \Delta$ Η μεταβολή είναι αδιαβατική, δηλαδή $Q_{\Gamma\Delta} = 0$ και επομένως ισχύει ότι:

$$W_{\Gamma\Delta} = -\Delta U_{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -W_{\Gamma\Delta} = -7{,}65) \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -7{,}65 \text{ J}$$

Δ4. Εφόσον γνωρίζουμε το έργο και τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας σε όλες τις μεταβολές, ο υπολογισμός της θερμότητας θα γίνει με τη βοήθεια του 1^{ου} θερμοδυναμικού νόμου.

$A \to B$ $\quad Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 1 + 1{,}5 \Rightarrow Q_{AB} = 2{,}5 \text{ J}$

$B \to \Gamma$ $\quad Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} + \Delta U_{B\Gamma} = 2{,}5 + 15 \Rightarrow Q_{B\Gamma} = 17{,}5 \text{ J}$

$\Gamma \to \Delta$ $\quad Q_{\Gamma\Delta} = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

Α→Β: αδιαβατική εκτόνωση από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α όγκου $V_{\mathrm{A}} = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ στην κατάσταση ισορροπίας Β όγκου $V_{\mathrm{B}} = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ και πίεσης $p_{\mathrm{B}} = 3\cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$.

Β→Γ: ισόχωρη ψύξη, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ για την οποία $p_{\Gamma} = 10^5\ \mathrm{N/m^2}$.

Γ→Δ: αδιαβατική συμπίεση, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Δ η οποία έχει όγκο ίσο με V_{A}.

Δ→Α: ισόχωρη θέρμανση μέχρι την αρχική κατάσταση Α.

Δ1) Να υπολογίσετε την πίεση του αερίου στις καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας Α και Δ.

Μονάδες 6

Δ2) Να βρείτε το έργο που παράγει το αέριο σε κάθε αδιαβατική μεταβολή.

Μονάδες 6

Δ3) Να βρείτε την απόδοση μιας μηχανής που θα λειτουργούσε με το συγκεκριμένο κύκλο.

Μονάδες 6

Δ4) Να βρείτε την απόδοση μιας μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών, όπως η μηχανή του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 7

Δίνονται: Για το ιδανικό αέριο η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο $C_V = \frac{3}{2}R$ και ότι: $2^{\frac{5}{3}} = 3{,}2$.

Δ1. Σχηματίζουμε έναν πίνακα με τις τιμές των θερμοδυναμικών παραμέτρων στις αντίστοιχες καταστάσεις ισορροπίας.

	$p(\times 10^5 \text{ N/m}^2)$	$V(\times 10^{-3} \text{ m}^3)$
Α		1
Β	3	2
Γ	1	2
Δ		1
Α		1

Επειδή η μεταβολή $A \to B$ είναι αδιαβατική, χρησιμοποιούμε τον νόμο του Poisson για να υπολογίσουμε την πίεση του αερίου στην κατάσταση Α. Πριν όμως θα υπολογίσουμε το συντελεστή Poisson για το ιδανικό αέριο:

$$C_P = C_V + R = \frac{3}{2}R + R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2}R \text{ οπότε } \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow p_A = p_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = 3\cdot 10^5 \cdot \left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{5}{3}} = 3\cdot 10^5 \cdot 3{,}2 \Rightarrow p_A = 9{,}6\cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Ομοίως θα εργασθούμε για την αδιαβατική μεταβολή $\Gamma \to \Delta$.

$$p_\Delta V_\Delta^\gamma = p_\Gamma V_\Gamma^\gamma \Rightarrow p_\Delta = p_\Gamma \left(\frac{V_\Gamma}{V_\Delta}\right)^\gamma = 1\cdot 10^5 \cdot \left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{5}{3}} = 1\cdot 10^5 \cdot 3{,}2 \Rightarrow p_\Delta = 3{,}2\cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Δ2.

$$A \to B \quad W_{AB} = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{1-\gamma} = \frac{3\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3} - 9{,}6\cdot 10^5\cdot 1\cdot 10^{-3}}{1-\frac{5}{3}} = -3\cdot\frac{6\cdot 10^2 - 9{,}6\cdot 10^2}{2} \Rightarrow W_{AB} = 540 \text{ J}$$

$$\Gamma \to \Delta \quad W_{\Gamma\Delta} = \frac{p_\Delta V_\Gamma - p_\Gamma V_\Gamma}{1-\gamma} = \frac{3{,}2\cdot 10^5\cdot 1\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}}{1-\frac{5}{3}} = -3\cdot\frac{3{,}2\cdot 10^2 - 2\cdot 10^2}{2} \Rightarrow W_{\Gamma\Delta} = -180 \text{ J}$$

Δ3. Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}}$$

Ο κύκλος της μηχανής αποτελείται από δύο αδιαβατικές και δύο ισόχωρες μεταβολές. Κατά την ισόχωρη μεταβολή το έργο ισούται με μηδέν. Επομένως το ολικό έργο που παράγεται κατά τον κύκλος λειτουργίας της μηχανής θα ισούται με το άθροισμα των έργων κατά τις αδιαβατικές μεταβολές, τιμές που υπολογίσθηκαν στο ερώτημα Δ2.

$$W_{o\lambda} = W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = 540 - 180 \Rightarrow W_{o\lambda} = 360 \text{ J}$$

Το προσφερόμενο ποσό θερμότητας θα ισούται με τη θερμότητα που απορροφάται κατά την ισόχωρη θέρμανση $\Delta \to A$ καθώς στις αδιαβατικές μεταβολές το ποσόν θερμότητας είναι μηδέν, ενώ κατά την ισόχωρη ψύξη $B \to \Gamma$ έχουμε αποβολή θερμότητας.

$$Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = Q_{\Delta A} = nC_V\Delta T = n\frac{3}{2}R(T_A - T_\Delta) = \frac{3}{2}(nRT_A - nRT_\Delta) = \frac{3}{2}(p_A V_A - p_\Delta V_A) \Rightarrow$$

$$Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = \frac{3}{2}V_A(p_A - p_\Delta) = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 10^{-3}\cdot(9{,}6\cdot 10^5 - 3{,}2\cdot 10^5) \Rightarrow Q_{\pi\rho o\sigma\varphi} = 960 \text{ J}$$

Επομένως:

$$\alpha = \frac{W_{o\lambda}}{Q_{\pi\rho o\sigma\varphi}} = \frac{360}{960} = \frac{3}{8} \Rightarrow a = 0{,}375$$

Δ4. Για να βρούμε τον συντελεστή μιας μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε στις ίδιες ακραίες θερμοκρασίες, θα πρέπει να γνωρίζουμε αυτές τις θερμοκρασίες. Σύμφωνα με τον κύκλο που περιγράφεται, η υψηλή θερμοκρασία θα είναι η T_A ενώ η χαμηλή θερμοκρασία θα είναι η T_Γ. Αυτό συμβαίνει γιατί κατά την αδιαβατική εκτόνωση $A \rightarrow B$ η θερμοκρασία T_B θα είναι μικρότερη της T_A και λόγω της ισόχωρης **ψύξης** $B \rightarrow \Gamma$ η θερμοκρασία T_Γ θα είναι ακόμη μικρότερη.

Έτσι, ο συντελεστής της μηχανής Carnot θα δίνεται από τη σχέση:

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_\Gamma}{T_A}$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε τις αντίστοιχες θερμοκρασίες, θα χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση για τις αντίστοιχες μεταβολές ώστε να δημιουργήσουμε μια σχέση μεταξύ των θερμοκρασιών T_A και T_Γ.

$$A \rightarrow B \qquad \frac{p_\Gamma V_\Gamma}{p_A V_A} = \frac{nRT_\Gamma}{nRT_A} \Rightarrow \frac{T_\Gamma}{T_A} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{9{,}6 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \frac{T_\Gamma}{T_A} = \frac{2}{9{,}6}$$

Επομένως ο συντελεστής απόδοσης θα είναι

$$e = 1 - \frac{T_\Gamma}{T_A} = 1 - \frac{2}{9{,}6} = \frac{9{,}6}{7{,}6} \Rightarrow e = \frac{19}{24}$$